MAI 1 - 11. cvičení - neurčitý integrál 3.
(Najděte primitivní funkce na maximálních otevřených intervalech)

Integrály funkcí, které pomocí vhodných substitucí vedou na integraci racionálních funkcí:

a) $\int R(e^x)\,dx$ - substituce $e^x = t$ (tj. $x = \ln t$ nebo-li dle přednášky $\varphi(t) = \ln t$):

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx \;;\quad \int \frac{1}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx \;;\quad \int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\,dx \;;\quad \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx \;;\quad \int \frac{1}{(e^x+1)^2}\,dx \;;$$

b) $\int R(\ln x)\frac{1}{x}dx$ - substituce $\ln x = t$ tj. $g(x) = \ln x$):

$$\int \frac{\ln x}{x\cdot(1+\ln^2 x)}\,dx \;;\quad \int \frac{\ln x}{x\cdot(\ln x-1)(\ln^2 x-2\ln x+2)}\,dx \;;\quad (*)\ \int \frac{\ln x+1}{x\cdot(\ln^3 x+8)}\,dx \;;$$

c) $\int R\left(x,\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, $s\in N, ad-bc\neq 0$ - substituce $\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \;;\quad \int \frac{\sqrt{x}-1}{x\cdot(x-2\sqrt{x}+2)}\,dx \;;\quad \int \frac{1}{(\sqrt{x}+2)\cdot(x+6\sqrt{x}+10)}\,dx \;;\quad \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \;;$$

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx \;;\quad \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx \;;$$

d) $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$:

(i) substituce $\sin x = t$ nebo $\cos x = t$:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx \;;\quad \int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx \;;\quad \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\,dx \;;\quad \int \sin^5 x\,dx \;;\quad \int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx \;;\quad \int \frac{1}{\sin x}\,dx \;;$$

$$\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx \;;\quad \int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,dx \;;$$

(ii) substituce $tg\,x = t$:

$$\int \frac{1}{1+tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx \;;\quad \int \frac{1}{1+tgx}\,dx \;;\quad \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx \;;\quad \int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\,dx \;;\quad \int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx \;;$$

(iii)* substituce $tg\frac{x}{2} = t$:

$$\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx \;;\quad \int \frac{1}{5+4\sin x}\,dx \;;\quad \int \frac{2+\sin x}{2-\sin x}\,dx \;.$$